Interpolationspolynome

Die Berechnung der Koeffizienten eines Interpolationspolynoms hinsichtlich gegebener Stützpunkte führt unter anderem zu einer so genannten Vandermonde-Matrix, die es zu invertieren gilt. Beim CASIO *fx-CG 20* empfiehlt sich zu deren Vorbereitung der Einsatz der implementierten Tabellenkalkulation, um sich dadurch variable Spielräume offen zu halten.

Alle nachstehend notierten Namensvorschläge sind als Optionen zu verstehen und für die Funktionsweise der dadurch angesprochen Objekte – seien es Tabellenkalkulationsblätter, Matrizen oder Listen – irrelevant. Allerdings erleichtern die empfohlenen Bezeichnungen die Orientierung innerhalb des hier beschrieben Arbeitsablaufes.

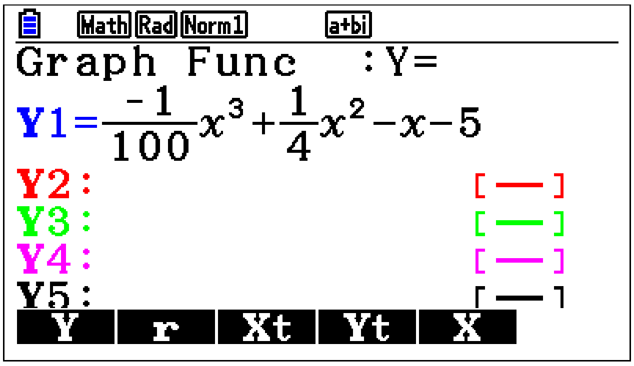


Abbildung 1: Funktionsterm eingeben

Im Hauptmenü *Graph* (5) auswählen. Funktionsterm wie in *Abbildung 1* eingeben und mit EXE abschließen. Mit Shift-V-Windows (F3) den Plottbereich auf der x-Achse von -10 bis 30 und auf der y-Achse von -20 bis 20 skalieren. Mit EXE abschließen. Mit Shift-G↔T (F6) zum Graph von **Y1** umschalten (vgl. *Abbildung 2*).

Im Hauptmenü *Tabellenkalkulation* (4) auswählen. Neues Tabellenblatt mit FILE, NEW zum Beispiel als INTPOL03 anlegen. Mit EXE abschließen. Die vier in *Abbildung 3* genannten Stützstellen in Spalte A eingeben.

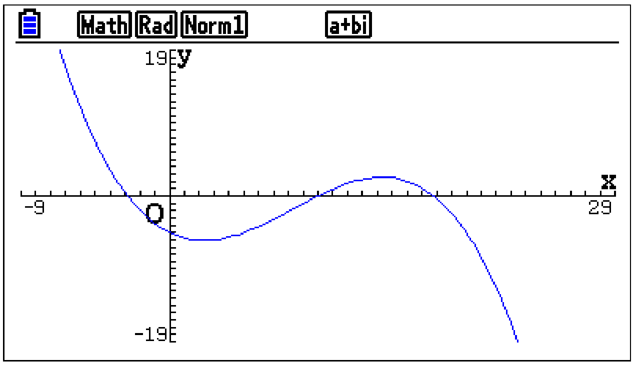
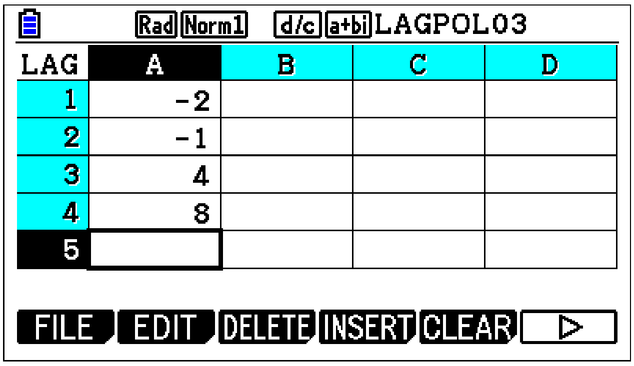


Abbildung 2: Graph der gegebenen Funktion **Y1**

Per Cursortasten zur ersten Position in Spalte B gehen und mit „= **Y1**(A1)“ den Funktionswert von der ersten Stützstelle -2, die innerhalb von Zelle A1 notiert ist, berechnen.

Hierzu wird Shift-= verwendet, wobei die Funktionsbezeichnung **Y** über die Taste VARS, GRAPH erreicht wird. Anschließend **Y** über die Zifferntastatur auf „**Y1**(“ ergänzen. Zweimal EXIT wählen, um zurück ins Tabellenmenü zu gelangen. Dort per GRAB einen relativen Zellbezug einleiten.



LAG	A	B	C	D
1	-2			
2	-1			
3	4			
4	8			
5				

Abbildung 3: Vier Stützstellen eingeben

Während GRAB aktiv ist, in die Zelle wechseln, zu der ein Bezug hergestellt werden soll, also hier zur Zelle A1. Abschluss der Operation mit SET, dem Schließen der Klammer (vgl. *Abbildung 4*) und EXE. Selbstverständlich ließe sich der Zellbezug zu A1 auch direkt eintragen.

Die Formel „= **Y1**(A1)“ aus B1, wird in die nächsten drei Zellen der Spalte B kopiert, wobei die Tabellenkalkulation automatisch relativiert, also die Fassungen „= **Y1**(A2)“, „= **Y1**(A3)“ und schließlich „= **Y1**(A4)“ verbucht.

Das Kopieren wird innerhalb von Zelle B1 mit EDIT, COPY eingeleitet und abschließend in den drei übrigen Feldern B2, B3 und B4 per PASTE abgeschlossen (vgl. *Abbildung 4*).

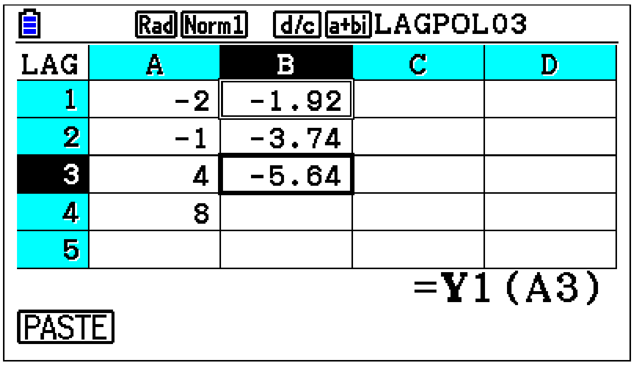


Abbildung 4: Einfügen der Funktionswerte in Spalte B

Nachdem auf diese Weise sämtliche Stützpunkte in Form ihrer x- und y-Koordinaten notiert sind, erfolgt die Eingabe der Vandermonde-Matrix ab Zelle D1. Zuvor zweimal EXIT wählen.

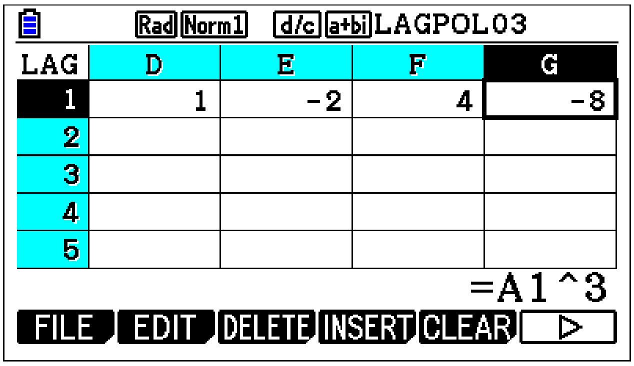


Abbildung 5: Erste Zeile der Vandermonde-Matrix eingeben

Die Formeln „=A1^0“, „=A1^1“, „=A1^2“ und „=A1^3“ können wie gehabt zunächst per GRAB vorbereitet oder alternativ direkt komplett über die Tastatur eingebracht werden.

Mit Hilfe von Shift-Clip werden die Zellen D1, E1, F1 und G1 insgesamt markiert und anschließend per EDIT, COPY zum Kopieren in die drei darunter liegenden Zeilen vorbereitet.

Cursor auf Zelle D2 positionieren. Mit PASTE abschließen. Das Einfügen per PASTE in die beiden übrigen Zellen D3 und D4 durchführen, was das Kopieren der vier Zellen D1, E1, F1 und G1 inklusive relativierter Adressbezüge abschließt und somit die Vandermonde-Matrix komplettiert (vgl. *Abbildung 6*). Mit zweimal EXIT zurück zur obersten Ebene im Tabellenmenü.

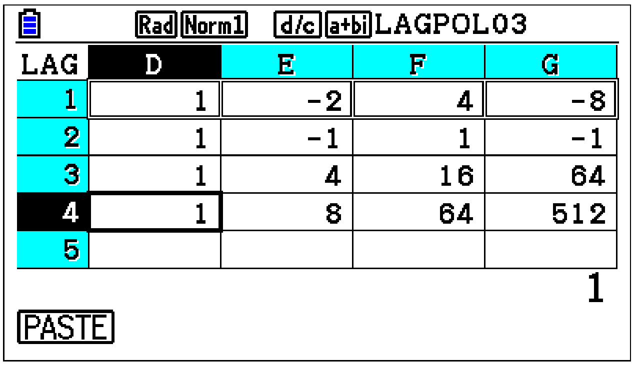


Abbildung 6: Die Vandermonde-Matrix ist komplett.

Um die hiermit zur Verfügung stehenden Daten einer Berechnung in Form von Matrizen zugänglich zu machen, wird die Vandermonde-Matrix – da sie auf den x-Werten basiert – in die Matrix **Mat X** transformiert. Auf der anderen Seite findet sich Spalte B, welche die y-Werte repräsentiert, innerhalb von **Mat Y** wieder.

Unter Einsatz von Shift-Clip wird der Bereich D1:G4 markiert und über die Menüpunkte ▷, STORE, MAT, in die quadratische, reguläre Matrix **Mat X** überführt. Den Namensvorschlag für die Matrix im Display von A auf X ändern. Abschluss mit zweimal EXE. Analog verfährt man mit dem Bereich B1:B4, so dass die y-Werte über die Matrix **Mat Y** zur Verfügung stehen.

Im Hauptmenü *Run-Matrix* (1) auswählen. Um die Koeffizienten a_i des gesuchten Interpolationspolynoms

$$P_3(x) := \sum_{i=0}^{3} a_i x^i$$

berechnen zu können, muss das Produkt **Mat A** wie folgt bestimmt werden:

$$\textbf{Mat X}^{-1} \times \textbf{Mat Y} \rightarrow \textbf{Mat A} \quad (*)$$

Dahinter verbirgt sich im Einzelnen die Berechnung des Produktes der linken Seite folgender Gleichung:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

Mit Shift-Mat und Alpha X zuzüglich „^−1" wird die gesamte Zeile bei (∗) sukzessive eingegeben und mit EXE abgeschlossen. Die gesuchten Koeffizienten a_i tauchen als Komponenten der somit neu erstellten Matrix **Mat A** (vgl. *Abbildung 7*) auf.

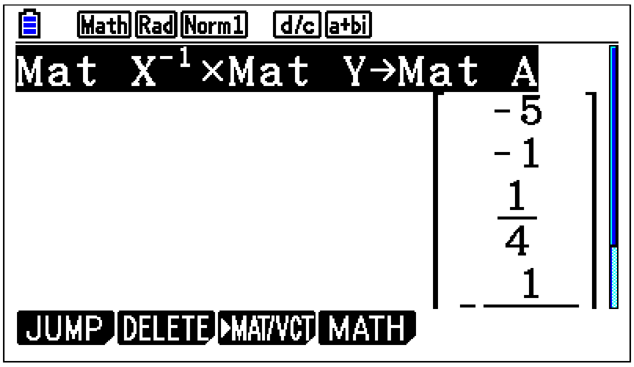


Abbildung 7: Die Koeffizienten a_i erscheinen als Komponenten der Matrix **Mat A** *in der Reihenfolge a_0, a_1, a_2, a_3*

Um den Zugriff auf deren einzelne Komponenten zu ermöglichen, wird **Mat A** in eine Liste transformiert, die den Namen **List 3** erhält. Dieser Übergang geschieht mit der Taste für weitere Optionen OPTN. Das ermöglicht den Zugriff auf den Menü-Punkt MAT/VCT und darüber hinaus auf **Mat → Lst** (vgl. *Abbildung 8*).

Die Notation der **1** in der in *Abbildung 8* sichtbaren Befehlszeile „**Mat → List(A, 1)** ..." ist erforderlich, um die erste Spalte von **Mat A** in den Fokus zu nehmen, gleichwohl hier nur eine einspaltige Matrix, sprich ein Vektor, vorliegt.

Auf die einzelnen Komponenten von Liste **List 3** wird innerhalb der Grafik-Umgebung zugegriffen. Die Liste startet bei a_0.

Im Hauptmenü *Graph* (5) auswählen. Funktionsterm **Y2**, wie in *Abbildung 9* angedeutet, sukzessive wie folgt eingeben und mit EXE abschließen:

$$\text{List 3[1]}x^{1-1}+\text{List3[2]}x^{2-1}$$

$$+\text{List3[3]}x^{3-1}+\text{List3[4]}x^{4-1}$$

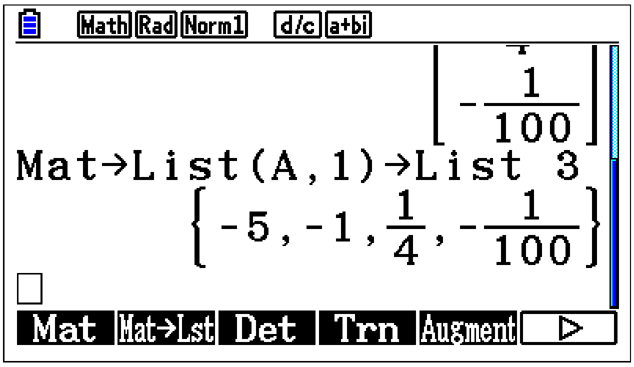


Abbildung 8: Die gesuchten Koeffizienten a_i erscheinen als Komponenten von **List 3** *in der Reihenfolge a_0, a_1, a_2, a_3.*

Der Zugriff auf die Listenelemente a_0, a_1, a_2, und a_3 geschieht per Shift-List zuzüglich der jeweiligen Ergänzung durch die 3 als Listenname und der Listenposition in eckigen Klammern.

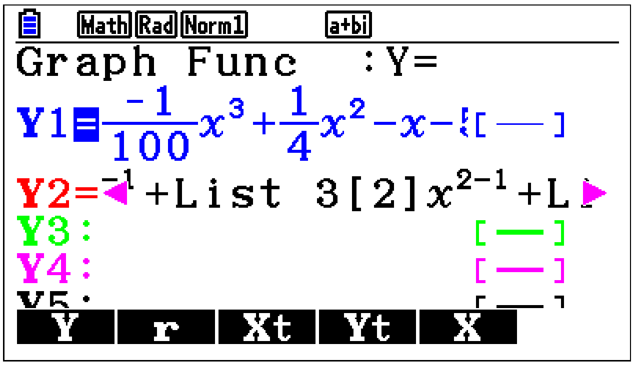


Abbildung 9: Interpolationspolynom $P_3(x)$ als **Y2**

Die Nummerierung der Liste reicht von 1 bis 4, während sich die Indizes der Koeffizienten a_i von 0 bis 3 erstrecken, $i = 0, \ldots, 3$. Diese Diskrepanz versucht die Schreibweise

$$P_3(x) = \text{List 3[1]}x\hat{}(1-1)+\text{List3[2]}x\hat{}(2-1)$$

$$+\text{List3[3]}x\hat{}(3-1)+\text{List3[4]}x\hat{}(4-1)$$

mit Hilfe von Exponenten, die als Differenzen formuliert sind, ein wenig zu kompensieren.

Wegen der Vorabauswahl von **Y1** als Polynom 3. Grades muss **Y2** genau dieses Polynom zurückliefern. Dies äußert sich im identischen Verlauf beider Graphen (vgl. *Abbildung 2*). Speziell gilt natürlich **Y2**(4)=$-5,64$ (vgl. auch *Abbildung 4* bzgl. **Y1**).

Eine Anpassung an neue, andere Funktionsterme **Y1** ist leicht möglich. Falls die relevanten Stützstellen nicht verändert werden sollen, liefert das Tabellenblatt die neuen y-Werte ad hoc.

Allerdings muss zuvor für Zelle B1 der Bezug zur Funktion **Y1** erneut komplett mittels „Shift-= ... usw.“ erstellt werden. Dagegen bleibt die Vandermonde-Matrix **Mat X** in diesem Fall unverändert, da sie allein von den Stützstellen und nicht von den y-Werten abhängig ist. Erst eine Modifikation der Stützstellen erforderte eine zusätzliche Neuberechnung von **Mat X**.

Nach Transformation der angepassten y-Werte in die Matrix **Mat Y** sowie einer Neuberechnung von

$$\textbf{Mat X}^{-1} \times \textbf{Mat Y} \rightarrow \textbf{Mat A}$$

zuzüglich einer erneuten Transformation der Matrix **Mat A** in Liste **List 3** kann der Grafik-Editor auf diese modifizierten Daten zugreifen und das veränderte Polynom **Y2** zeichnen.

Für die Funktion (vgl. *Abbildung 10*)

$$\textbf{Y1} : -10 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{30}(x+5)\right) + 2$$

fände sich dann die dort notierte Darstellung des zugehörigen Interpolationspolynoms **Y2**. Zum Vergleich: Die Koeffizienten für **Y2** lauteten nun:

$$\begin{aligned} a_0 &= -6,61.20 \\ a_1 &= -0,99.248 \\ a_2 &= 0,18.885 \\ a_3 &= 7,77.38\text{E}-4 \end{aligned}$$

Unter Umständen erhebt sich abschließend die Frage, ob es nicht zweckdienlicher wäre, die vorgestellten Zusammenhänge in Form einer eActivity-Datei zu konservieren. Dies erlaubte den kompletten Ablauf des beschriebenen Verfahrens mit wenigen Tastendrücken nachzuverfolgen, was natürlich alle Aktionen ungleich schneller und weniger fehleranfällig machte.

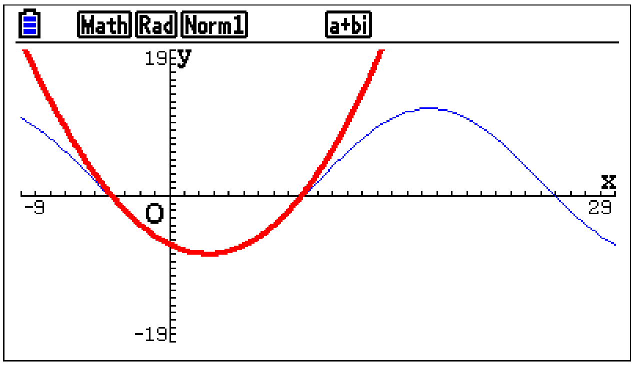


Abbildung 10: Approximation einer Sinus-Funktion

Diesem Vorschlag wäre allerdings entgegenzuhalten, dass der Sinn der präsentierten Vorgehensweise ja geradezu in der bewussten Entschleunigung während einzelner Arbeitsschritte zu suchen ist. Wie schon so oft zitiert, liegt deshalb das eigentliche Ziel der Arbeit auch hier im Wege verborgen, den es zu bewältigen gilt. Indem schrittweise und eigenständig hantiert werden muss, bedarf es bewusster Entscheidungen, mit welchen Instrumenten die jeweils relevanten Daten zwischen unterschiedlichsten Arbeitsumgebungen auszutauschen sind. Um dabei nicht den Überblick zu verlieren, ist eine passende Wahl der Variablennamen von besonderer Bedeutung.

Auf diese Weise entwickelt sich die vorliegende Problemstellung fast beiläufig zu einer Erkundungstour quer durch das auf den ersten Blick scheinbar zusammenhangslose Dickicht unterschiedlichster Optionen, mit denen der CASIO *fx-CG 20* respektive der CASIO *fx-CG 50* als so genannte GTR aufzutrumpfen vermögen.